https://doi.org/10.36007/5383.2026.340

HÁROMSZÖG SZERKESZTÉSI FELADATOK LÉTREHOZÁSA INTERAKTÍV GEOGEBRA APPLETKÉNT

CREATING TRIANGLE CONSTRUCTION EXERCISES AS INTERACTIVE GEOGEBRA APPLETS

Peter VAJO[55]

ABSTRACT
With the growing significance of technology-based education and the advancements in Computer Algebra and Dynamic Geometry systems, automated tools for interactive learning have attracted significant attention. Nonetheless, the scarcity of interactive open-source online tools for geometric construction problems that offer feedback has hindered their wider implementation within the educational system. In this work, the focus will be on triangle construction problems within the broader topic of geometric constructions. Emphasis will be placed on methods for creating interactive triangle construction applets in the widely popular GeoGebra software. The necessary steps will be outlined to enable mathematics teachers to create interactive GeoGebra applets with automatic evaluation for a diverse range of triangle construction problems.

KEYWORDS
triangle construction problems, interactive learning, automatic evaluation, GeoGebra, applet

BEVEZETŐ

Az oktatási technológiák gyors fejlődése miatt egyre nagyobb szükség van dinamikus matematikai szoftverekre a matematika oktatásában (Stols & Kriek, 2011; Zengin & Tatar, 2017). A különböző technológiák, matematikai szoftverek használata képes javítani az oktatás minőségén, gazdagítani a geometria vizualizációját, lehetőséget teremteni a kreatív gondolkodásra, tanulóközpontú légkör létrehozására, a tanulók figyelmének tartósabb megragadására és őket motiválva mélyebben bevonni a tanulási folyamatba (Sanders, 1998; Bhagat et al., 2015; Hegedus et al., 2015; Stols & Kriek, 2011).

A geometria fogalmi megértéssel történő elsajátítása olyan megfelelő módszerek alkalmazását igényli, amelyek aktívan bevonják a diákokat, és támogatják őket abban, hogy önálló, kritikus gondolkodók és önvezérelt tanulók legyenek (Gurmu et al., 2024).

A GeoGebra egy ingyenesen elérhető oktatási szoftver, amelynek világszerte több mint 100 millió felhasználója van (Botana et al., 2024). Elérhető a weben és a GeoGebra alkalmazáson keresztül, számítógépeken, táblagépeken és okostelefonokon egyaránt, a GeoGebrával készülő appletek

[55] Mgr. Peter Vajo, Selye János Egyetem, Gazdaságtudományi és Informatikai Kar, Matematika Tanszék, petervajo4@gmail.com

pedig integrálhatóak tanulás menedzsment rendszerekbe is (Csiba & Vajo, 2024). A Geogebra szoftver élénk és dinamikus tanulási környezetet teremt, ahol a memorizálás helyett a fogalmi tanulás és a problémamegoldáson alapuló tanulás kerül előtérbe (Tatar & Zengin, 2016; Suweken 2020).

Ezen munka célja felhasználni a GeoGebrában rejlő lehetőségeket interaktív, automatikusan kiértékelődő appletek létrehozására, amelyek különböző oktatási szinteken (közép- és felsőoktatás) járulnának hozzá a háromszög szerkesztési feladatok témakörének tanításához és tanulásához. Bemutatásra kerülnek azon szükséges lépések, amelyeket elvégezve, reprodukálva, jól működő interaktív appleteket tudunk létrehozni a háromszög szerkesztési feladatok témakörére.

Elméleti alapok

Háromszög szerkesztési feladatok esetében fontos tisztában lennünk a háromszög szögei és oldalai közti összefüggésekkel, nevezetes vonalaival, nevezetes pontjaival és ezek tulajdonságaival:

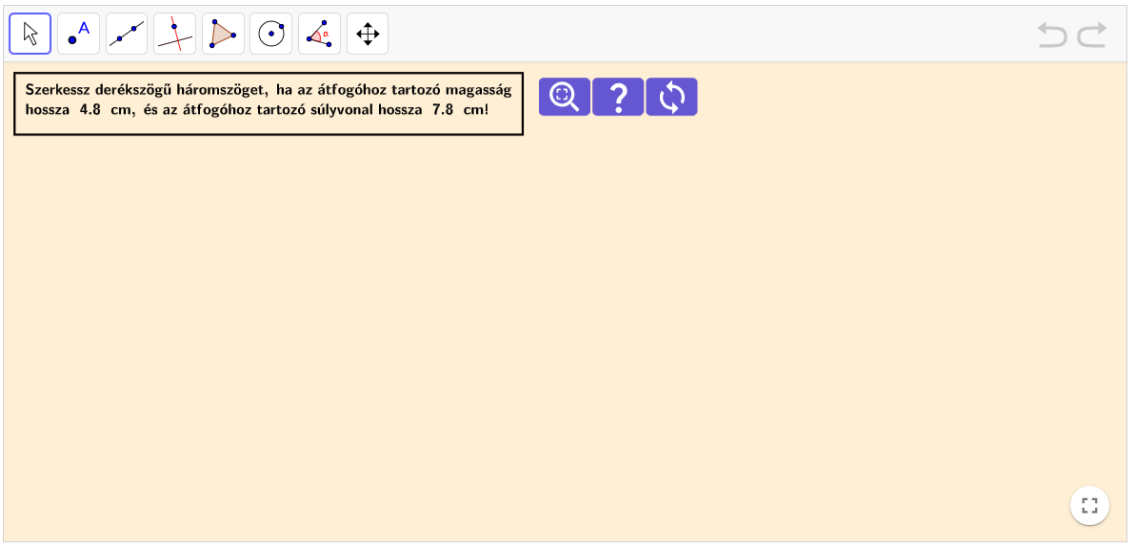
- A háromszög belső szögeinek összege 180°.
- A háromszögben a nagyobb oldallal szemben fekvő szög is nagyobb (tk. a Szinusz-tétel).
- A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a háromszög köré írható körének középpontja.
- A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a háromszögbe írható kör középpontja. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a háromszög magasságpontjának nevezzük.
- A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a háromszög súlypontjának nevezzük. A súlypont a súlyvonalakat a csúcstól számítva 2:1 arányban osztja.
- A háromszög oldalfelező pontjait összekötő szakaszokat a háromszög középvonalainak nevezzük.
- A háromszög bármely középvonala párhuzamos az oldalfelezési pontját nem tartalmazó oldalával és fele akkora hosszú. A 3 középvonal 4 egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget.

Említésre méltó még a megszerkeszthetőség szempontjából például olyan elengedhetetlen feltételek és tulajdonságok teljesülése, mint a háromszög egyenlőtlenség (bármely két oldal hosszának az összege nagyobb kell hogy legyen a harmadik oldal hosszánál), vagy hogy egy súlyvonal hossza sosem lehet kisebb az ugyanazon oldalhoz tartozó magasság hosszánál.

Továbbá, a háromszög szerkesztési feladatok esetében elengedhetetlen a mértani helyek szerepe. Egy meghatározott kritériumoknak megfelelő pontok halmazát mértani helynek nevezzük. A mértani helyek alapvető fontosságúak a háromszög szerkesztési feladatokban, mivel ezen feladatok megoldásához meg kell vizsgálni a megadott adatokat, majd meg kell határozni a feltételeknek megfelelő pontok mértani helyét. A mértani helyek közé tartoznak a körök, a párhuzamos egyenesek, a felezőmerőleges, a szögfelezők, Thalesz-kör, az ellipszisek, parabolák, hiperbolák és az Apollóniusz-kör. A szerkesztési feladatokban, ahogy Varga (1969) is írja, a mértani helyeket gyakran implicit módon határozzák meg (pl. Határozzuk meg a megadott egyenestől 4 cm-re lévő pontok mértani helyét!).

Háromszög szerkesztési appletek létrehozásának lépései

A következőkben bemutatásra kerülnek háromszög szerkesztési feladatok GeoGebrában történő megvalósításainak lépései. Az 1. ábrán látható egy kész applet megjelenése. Az applet tartalmazza az általunk választott feladat szövegét, a szövegben a sikeres megoldáshoz szükséges adott adatokkal. Ezek az adatok (magasságvonal és súlyvonal hossza) véletlenszerűen generálódnak, minden egyes frissítés után új adatokkal szembesül a megoldó. Továbbá az appletek tartalmaznak egy módosított eszköztárat, valamint három dedikált gombot, ezek balról jobbra haladva: az Ellenőrzés Gomb, a Segítség Gomb, és a Frissítés Gomb. Ezek a gombok ebben a munkában részletesebben nem lesznek taglalva.

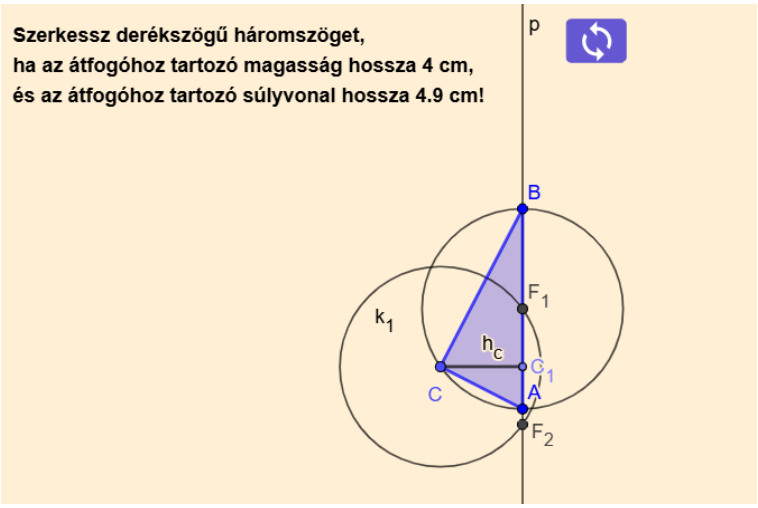


1. ábra: Egy kiválasztott háromszög szerkesztési applet kinézete megnyitás után
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

Egy érdekes észrevétel lehet az appletek szerkesztési felületeinek üressége — nem tartalmaz előre megszerkesztett kiindulási objektumot, amiből folytatnia kell a megoldónak a szerkesztést. Ezzel a megvalósítással nagyobb szabadságot tudunk nyújtani a megoldó felé a helyes megoldás megszerkesztésének kapcsán, mivel nem korlátozzuk a legelső szerkesztési lépést sem. Előfordulhat, hogy a diák más szerkesztési lépéseket vagy a szerkesztési lépések más sorrendjét használva jut el a helyes megoldásig. Továbbá, így a feladatmegoldás nagyobb kihívást tud jelenteni főleg olyan feladatok esetében, ahol nem egyértelmű a szerkesztés első lépése sem vagy (és) nem egyértelmű a szerkesztéshez szükséges három megadott adat sem (lásd 1. ábra).

Megoldás megszerkesztése

Bármilyen háromszög szerkesztési feladat GeoGebrában történő létrehozásáról legyen szó, első lépésként meg kell szerkesztenünk a helyes megoldást, megoldásokat (lásd 2. ábra). Ez a helyes megoldás fogja nyújtani a viszonyítási alapot a GeoGebra appletnek, ami alapján ki tudja értékelni a későbbiekben a megoldó diák válaszát.



2. ábra: A feladathoz tartozó helyes megoldás megszerkesztése, majd elrejtése
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

Miután megszerkesztettük az adott feladat helyes megoldását, ezt a megoldást az összes segéd szerkesztéssel együtt rejtsük el az applet felületéről — *Alakzat mutatása* beállításnál tudjuk ezt megtenni. Így a megoldó számára ez a megszerkesztett helyes megoldás nem lesz látható. A feladat helyes megoldásának megszerkesztése és elrejtése tekinthető a háromszög szerkesztési feladatok interaktív, automatikusan kiértékelődő appletként történő elkészítésének első lépéseként.

JavaScript használata

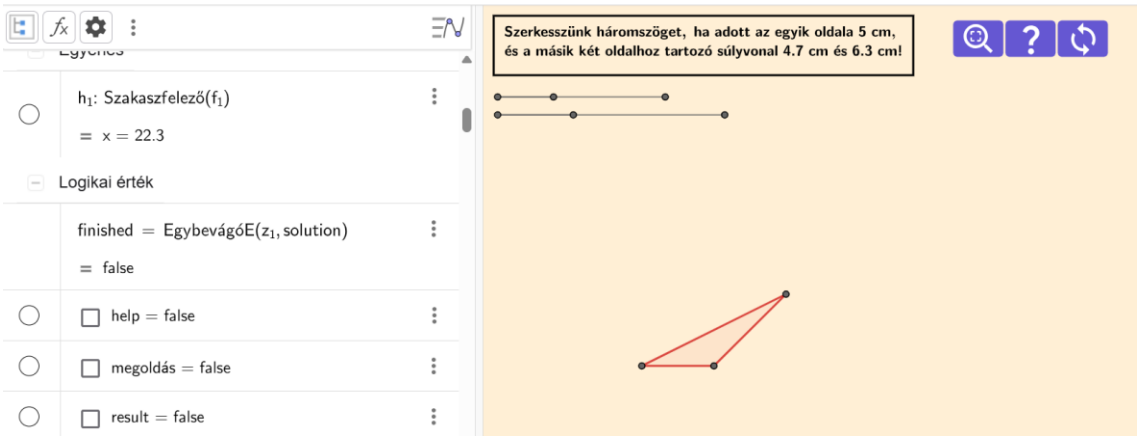
Az interaktív appletek fontos funkciója a kiértékelés, amely a megoldó által megszerkesztett megoldás helyességét ellenőrzi. Ezt az ellenőrzést egy előre megírt JavaScript kód végzi, ezért is nem szükséges (és nem is elvárt), hogy a matematika tanár rendelkezzen ilyen szintű informatikai, vagy kódolási tudással. Az ellenőrzés funkció működéséhez a lent található JavaScript kódot szükséges az appletben a megfelelő helyre beillesztenünk. Ezt meg tudjuk tenni bármely az applet felületére helyezett elem vagy objektum beállításain belül a Script→Globális JavaScript menüpontokat követve érhető el. A Globális JavaScript alatt található felületen kerül felhasználásra a már előre megírt JavaScript:

```
function ggbOnInit() {
   ggbApplet.debug("ggbOnInit");
   ggbApplet.registerAddListener("newObjectListener");
   ggbApplet.registerUpdateListener("myUpdateListenerFunction");
}

function myUpdateListenerFunction(obj) {
   if (obj == "result") {
      var finished = ggbApplet.getValueString("finished");
      var res = ggbApplet.getValueString("result");
      if (res.indexOf("true") > -1) {
         if (finished.indexOf("true") > -1) {
            ggbApplet.setVisible("result1", true);
         } else {
                  ggbApplet.setVisible("result2", true);
             }
      } else {
         ggbApplet.setVisible("result1", false);
         ggbApplet.setVisible("result2", false);
      }
   }
}

function newObjectListener(obj) {
   var finished = ggbApplet.getValueString("finished");
   if (finished.indexOf("true") == -1) {
     if (obj != "finished") {
        var cmd = "finished = AreCongruent(" + obj + ",solution)";
        ggbApplet.debug(cmd);
        ggbApplet.evalCommand(cmd);
        finished = ggbApplet.getValueString("finished");
      }
   }
}
```

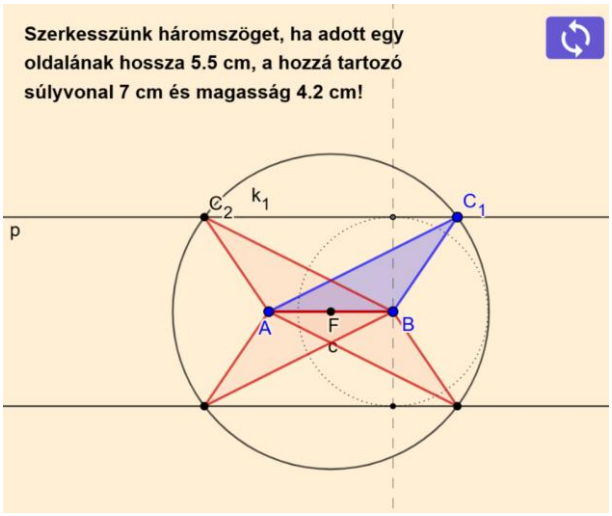
Részletezve a fenti JavaScript működését, a script az összes a megoldó által megszerkesztett objektumot megvizsgálja és összehasonlítja az általunk első lépésben megszerkesztett és elrejtett helyes megoldással. Ha azok egybevágóságát megállapítja, akkor helyesen megoldott feladathoz jutunk és a megoldást igaznak értékeli.
Ezt a script ***var cmd = "finished = AreCongruent(" + obj + ",solution)";*** sora végzi, ami az összes újonnan megszerkesztett objektumot összehasonlítja a „solution” nevű helyes megoldással (lásd 3. ábra — az újonnan szerkesztett z_1 háromszöget összehasonlítja a helyes megoldással, és mivel nem egybevágók, ezért a megoldást hamisra értékeli, tehát nem született helyes megoldás). Ha nem szeretnénk a scriptben ezt a „solution” kifejezést megváltoztatni (az általunk megszerkesztett és elrejtett helyes megoldás nevére), akkor szükséges az első lépésben megszerkesztett helyes megoldásunk nevét a scriptben található „solution” névre megváltoztatni. Így a rejtett megoldás neve „solution” lesz, és működni fog a JavaScript által vezérelt ellenőrző funkció.



3. ábra: A finished változó false, tehát a megszerkesztett háromszög nem egybevágó a helyes megoldással
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

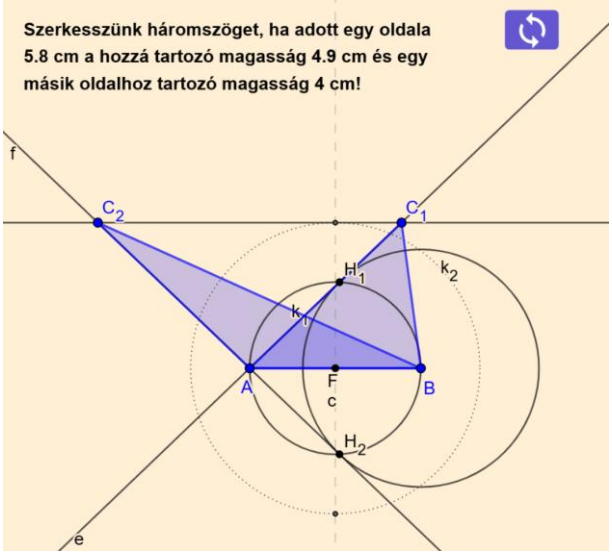
Az összes megoldás scriptbe vétele

Összes lehetséges megoldáson érthetjük az összes egybevágó (szimmetrikus) helyes megoldást (lásd 4. ábra) is és/vagy a nem egybevágó helyes megoldásokat. Mivel a szimmetrikus megoldások ugyanazon gondolatmenetet követnek, ezért ebben a munkában a nem egybevágó helyes megoldások scriptbe vételére szentelünk időt.



4. ábra: Egy feladathoz tartozó négy szimmetrikus, egybevágó megoldás
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

A háromszög szerkesztési feladatokban tipikus okozója tud lenni a nem egybevágó megoldásoknak a magasságvonal helyzete. Az 5. ábra szemlélteti a két nem egybevágó helyes megoldását a feladatnak, egyik esetben a magasságvonal a háromszögön belül, míg a másik megoldás esetében a magasságvonal a háromszögön kívül található.



5. ábra: Egy feladathoz tartozó két különböző, nem egybevágó helyes megoldás
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

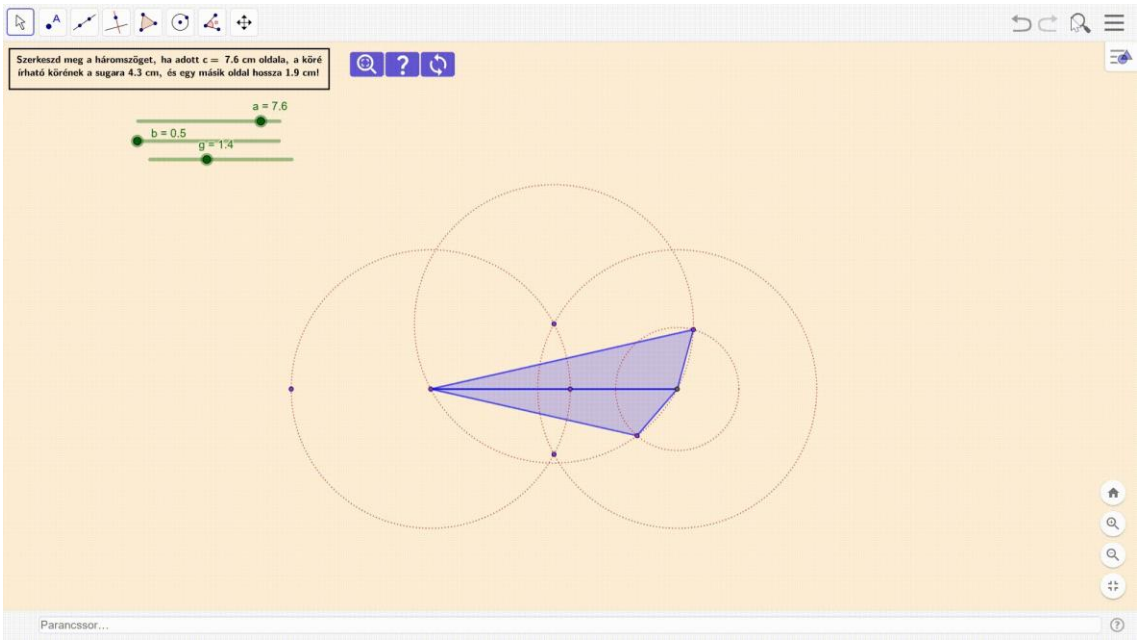
Ezen megoldások felismerését és a feladat helyes kiértékelését az előző JavaScript kód bővítésével tudjuk elérni. Miután megszerkesztettük, átneveztük (solution1 és solution2) és elrejtettük a mindkét helyes megoldást, a script következő sorát ilyen módon bővítjük:

```
var cmd = "finished = (AreCongruent(" + objName + ", solution1) || AreCongruent(" + objName + ", solution2))";
```

Ez lehetővé teszi számunkra, hogy különböző visszacsatolást tudjunk biztosítani a megoldó felé a megszerkesztett megoldások számától függően, gondolva itt akár különböző pontbeli vagy szóbeli visszajelzésre és értékelésre. A GeoGebra appleteken belül szöveges visszajelzések biztosíthatók, amelyek a *finished* változó értékétől függően jelennek meg (helyes, helytelen vagy részben helyes megoldásra utaló visszajelzés). Az appleteket különböző tanulás menedzsment rendszerekbe integrálva pedig a rendszer felismeri a *finished* változót és annak értéke alapján pontozza a megoldót.

Véletlenszerűsítés

Egy további fontos lépés a háromszög szerkesztési feladatok appletjeinek létrehozása során a véletlenszerűsítés. Mivel ezek az appletek vizualizációs szerepük mellett nagyban alkalmazhatók e témakör feladatainak gyakorlására, házi és beadandó feladatok számonkérésére, ezért az újbóli feladatmegoldás során szükség van a feladat szövegében megjelenő adatok véletlenszerűsítésére. Jó módszer lehet ennek elérésére a véletlen csúszkák használata (lásd 6. ábra), szem előtt tartva a megoldás megszerkeszthetőségét, kinézetét (pl. ne legyen belső szöge 10°-nál kisebb) és kerülve azt, hogy bizonyos megszerkesztésre kerülő metszéspontok ne essenek „túl közel” egymáshoz — kényelmetlenséget okozva a szerkesztés során.



6. ábra: Véletlen csúszkák használata a feladatban szereplő adatok véletlenszerűsítésére
Forrás: Képernyőkép, GeoGebra applet

Ha véletlen csúszkák és más különböző véletlenszerűsítési módszereket használva szerkesztjük meg első lépésben a rejtett helyes megoldást, akkor biztosítjuk, hogy ugyanazon feladatot megnyitva a diákok különböző adatokkal találják szembe magukat, valamit ugyanazon feladat újbóli megoldása során új kihívással szembesüljenek.

BEFEJEZÉS

A különböző matematikai szoftverek és dinamikus geometria környezetek nem a tanár helyettesítésére szolgálnak, hanem inkább azok kezében hatékony eszközökké válnak, beépülve a tanítási-tanulási folyamatba. A bemutatott módszerek alkalmassá teszik a matematika tanárt, hogy saját elképzelései szerint automatikusan kiértékelődő, véletlenszerű adatokat tartalmazó, automatikusan kiértékelődő interaktív appleteket hozzon létre háromszög szerkesztési feladatokra. Ezek az appletek akár önmagukban appletként vagy a GeoGebra weboldalán, akár tanulás menedzsment rendszerekbe integrálva megkönnyíthetik a tanár munkáját, a diákok számára szórakoztató feladatmegoldást és tanulóközpontúságot biztosítva.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezt a kutatást a KEGA grant (Kultúrna a edukačná grantová agentúra MŠVVaM SR) 004UJS-4/2025 számú támogatása biztosította.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Bhagat, K.K., Chang, C.-N., Chang, C.-Y. (2015). The impact of the flipped classroom on mathematics concept learning in high school. *The Internet and Higher Education*, *25*, 85–95, https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2015.02.001

Botana, F., Recio, T., & Vélez, M. P. (2024). On Using GeoGebra and ChatGPT for Geometric Discovery. *Computers*, *13*(8), 187. https://doi.org/10.3390/computers13080187

Csiba, P., & Vajo, P. (2024). Problems and challenges of using randomized automatically evaluating geometric construction problems in moodle lms. *AIMS Mathematics, 9* (3), 5234–5249, https://doi.org/10.3934/math.2024253

Gurmu, F., Tuge, C., & Hunde, A. B. (2024). Effects of GeoGebra-assisted instructional methods on students' conceptual understanding of geometry. *Cogent Education, 11*(1). https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2379745

Hegedus, S., Dalton, S., Tapper, J. (2015, 03). The impact of technology-enhanced curriculum on learning advanced algebra in us high school classrooms. *Educational Technology Research and Development, 63* , 203–228, https://doi.org/10.1007/s11423-015-9371-z

Sanders, C. V. (1998). Geometric constructions: visualizing and understanding geometry. *Mathematics Teacher, 91*(7), 554-556.

Stols, G., & Kriek, J. (2011). Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms?. *Australasian Journal of Educational Technology*, *27*(1), 137–151, https://doi.org/10.14742/ajet.988

Suweken, G. (2020). STEM oriented mathematics learning with GeoGebra. In 3rd International Conference on Innovative Research Across Disciplines (ICIRAD 2019) (pp. 258-263). Atlantis Press.

Varga, T. (1969). *A matematika tanítása*. Budapest: Eötvös Loránd University.

Zengin, Y., & Tatar, E. (2017). Integrating dynamic mathematics software into cooper- ative learning environments in mathematics. *Journal of Educational Technology & Society*, *20*(2), 74–88, Retrieved from http://www.jstor.org/stable/90002165